- Les analogies électro mécano acoustiques –

A l’avènement de l’électricité, les électriciens de l’époque, comparait ses effets en faisant des analogies avec les éléments mécaniques . Des termes tel que force électromotrice, force contre électromotrice, toujours employées, en sont les témoins. Le comportement des composants, d’un circuit électrique alternatif, était analysé en faisant l’analogie avec des éléments mécaniques vibrants. L’inductance était alors comparée à une masse et la capacitance à une élasticité (appelée aussi compliance).

Des comparaisons avec les circuits hydrauliques avaient également lieu. Des termes comme débit et courant en sont des exemples concrets.
Il est remarquable de constater que l’ensemble de ces circuits, issus de milieux apparemment différents sont régis par un même système d’équations différentielles. C’est en identifiant les constantes et les variables de chacune des équations que nous aboutirons aux analogies.

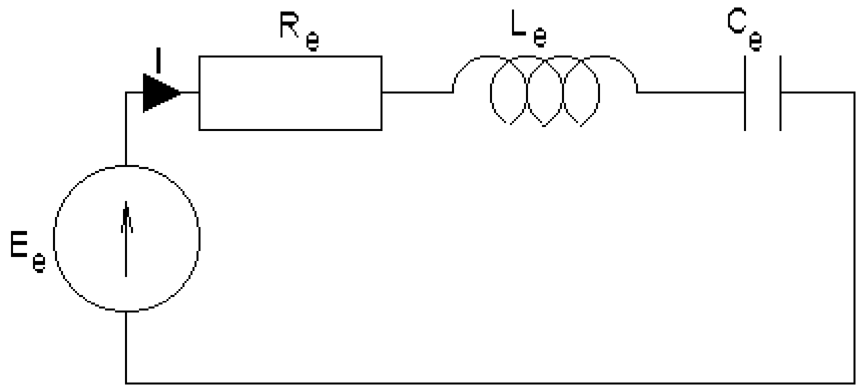
C’est un outil formidable d’aide, à la compréhension, et à la modélisation. Puisque des éléments sont analogues, nous pouvons les représenter schématiquement en employant une unique symbolique.

Par convention, ce sont les symboles électriques qui sont utilisés, sans doute pour leur simplicité. Seules les analogies de type impédance seront développées, ce sont les plus courantes, et surtout les mieux adaptées à la modélisation des éléments électroacoustiques.

Les expressions situées entre […] sont les équations aux dimensions de la grandeur considérée. Elles contribuent à la vérification de l’homogénéité d’une équation.

2-1- Analogies électro mécaniques

Considérons le schéma électrique suivant.

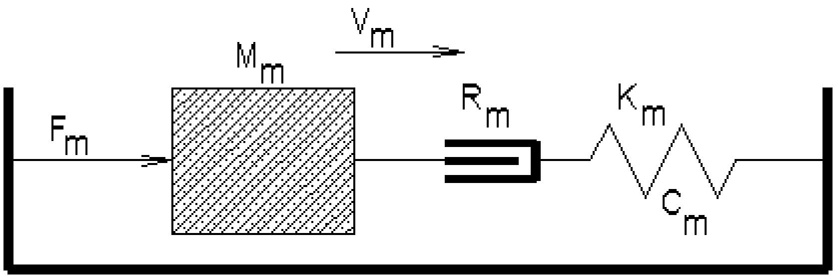


L’équation de son circuit est : $E_e = L_e .d^2Q/dt^2 + R_e. dQ/dt + Q/C_e$ (AN-1)

Avec :

E_e le générateur de force électromotrice E_e , exprimée en volts (V)$[M.L^2T^{-2}.Q^{-1}]$, qui débite
I , l’intensité de courant, exprimé en Ampères (A) $[Q.T^{-1}]$,
Q la quantité d’électricité ,en Coulombs (C) [Q].
L_e l’inductance , en Henry (H) $[L^{-2}.Q]$
R_e la résistance électrique, en Ohms (Ω) $[M.L^2.T^{-1}.Q^{-2}]$
C_e la capacitance, en Farads (F). $[M^{-1}.L^{-2}.T^2.Q^2]$

A partir du schéma mécanique suivant, ou la référence des forces est représentée en trait gras,



L'équation du circuit mécanique constitué du générateur de force F_m exprimée en Newtons [M.L.T$_{-2}$], appliquée à l'ensemble M_m, R_m et une raideur K_m, s'écrit :

$F_m = M_m\, d^2X/dt^2 + R_m.\, dX/dt + K_m\,.X$ (AN-2)

Avec :

X le déplacement , en mètres [L]
M_m la masse mécanique, en kg [M]
R_m la résistance mécanique , en N/s ou Ohm mécanique [M.T$_{-1}$]
K_m la raideur en N/m [M.T$_{-2}$]
L'inverse de la raideur est la compliance C_m= 1/K_m (AN-3)

Et ainsi interprétée AN-2 s'écrit:

$F_m = M_m\, d^2X/dt^2 + R_m.\, dX/dt + X/C_m$ (AN-4)

L'emploi de l'opérateur d'HEAVISIDE p= d/dt =jω , permet d'écrire:
En partant des relations AN-1 et AN-4:

$E_{e\,(p)} = p^2.\, L_e\, Q + p\, .R_e.\, Q + Q/C_e$ ♉ $E_{e\,(p)} = Q.\, (\, p^2.\, L_e + p.\, R_e + 1/C_e\,)$ (AN-5)

pour le réseau électrique, et
$F_{m(p)} = p^2.\, M_m.\, X + p\, .R_m.\, X + X/C_m$ ♉ $F_{m(p)} = X.\, (\, p^2.\, M_m + p.\, R_m + 1/C_m\,)$ (AN-6)

pour le réseau mécanique.
Sachant que dans un circuit électrique, l'intensité du courant, I, est la dérivée première de la quantité d'électricité Q par rapport au temps.
La formule liant la quantité d'électricité à l'intensité de courant dQ = I dt (AN-7)

Permet d'écrire I= p. Q , (AN-8)
ou Q= I/p , (AN-9)

permet la transformation de AN-5 sous la forme
$E_{e\,(p)} = (I/p).\, (\, p^2.\, L_e + p.\, R_e + 1/C_e\,)$ ♉ $E_{e\,(p)} = I\, .\, (\, p.\, L_e + R_e + 1/\, p.\, C_e\,)$ (AN-10)

De même, dans un circuit mécanique, la vitesse V, de déplacement est la dérivée première de l'espace parcouru X par rapport au temps ainsi dX = V.dt (AN-11)

En conservant la variable p V = p . X (AN-12)
ou X = V /p (AN-13)
permettant la transformation de AN-6

$F_{m(p)} = \left(V/p\right) . (p^2. M_m + p. R_m + 1/C_m)$ ♉ $F_{m(p)} = V. (p. M_m + R_m + 1/p.C_m)$ (AN-14)

Remarque

L'emploi de l'opérateur p a grandement facilité la transformation des équations.
L'écriture différentielle aurait amené à des changements de variables, qui n'auraient pas permis les factorisations aisées que nous avons opéré.

Le rapprochement entre, AN-5 et AN-10 d'une part et ,AN-6 et AN-14 d'autre part, met en évidence les analogies électro mécaniques reportées dans le tableau suivant :

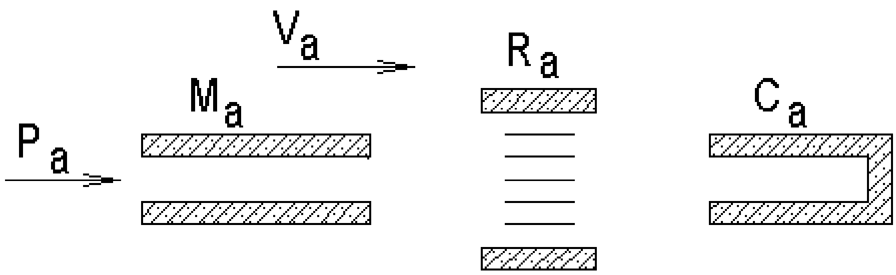
Réseau Mécanique Réseau Electrique
Grandeur Symbole Energie Grandeur Symbole Energie
Force F_m <-> Force électro motrice E_e
Déplacement X <-> Quantité d'électricité Q
Vitesse V <-> Intensité de courant I
Masse M_m $M_m V^2/2$ <-> Inductance L_e $L_e I^2/2$
Résistance R_m $R_m V^2$ <-> Résistance R_e $R_e I^2$
Compliance C_m $X^2 / 2.C_m$ <-> Capacitance C_e $U^2 / 2.C_e$

2-2- Analogies mécano acoustiques

Une pression, exprimée en Pascals $[M.L^{-1}.T^{-2}]$, est le rapport d'une force mécanique sur une surface soit
$P = F / S.$ (AN-15)
En soumettant la force précédente $F_{m(p)}$ à un élément de surface S de l'ensemble mécanique, AN-14 s'écrit
$F_{m(p)} /S = \left(V/S\right). (p. M_m + R_m + 1/p.C_m)$ (AN-16)

Si S est en contact avec l'air, nous pouvons nous considérer dans un réseau acoustique.
En multipliant haut et bas le second terme de cette nouvelle équation, et en identifiant la pression,
$P_a = \left(V.S/S^2 \right). (p. M_m + R_m + 1/p.C_m)$ (AN-17)
Et convenons que $V_a = V.S$ (AN-18)
V_a est alors le flux de vitesse acoustique.
Car le produit d'un champ de vecteur par une surface est appelé flux. Il s'exprime en m^3/seconde. $[L^3.T^{-1}]$
L'expression de la pression acoustique devient :
$P_a = V_a . (p. M_m /S^2 + R_m /S^2 + 1/p.C_m.S^2)$ (AN-19)
Que nous écrivons définitivement :
$P_a = V_a . (p. M_a + R_a + 1/p.C_a)$ (AN-20)

Le schéma, utilisant la symbolique acoustique, est :



avec la masse ou inertance acoustique $M_a = M_m /S^2$, (AN-21) en kg /m^4 $[M.L^{-4}]$,
la résistance acoustique $R_a = R_m /S^2$ (AN-22) en Ohm acoustique $[M.L^{-4}.T^{-1}]$
et la compliance acoustique $C_a = C_m . S^2$ (AN-23) exprimée en m^5/Newton $[M^{-1}.L^4.T^2]$.

Remarque-1:

Le passage d'un réseau mécanique vers un réseau acoustique s'est effectué à travers une surface.
Remarque-2:
En développant, $\mathcal{V}_a$ = V. S = S.dX/dt soit $\mathcal{V}_a$ = p . S. X (AN-24)

Le produit S. X représente un volume . Nous l'appellons $\mathbb{V}_b$ afin de bien le discerner de la vitesse de déplacement V et du flux de vitesse acoustique $\mathcal{V}_a$

$\mathcal{V}_a$ = p . $\mathbb{V}_b$ (AN-25)

Le tableau suivant récapitule les analogies entre les trois réseaux.

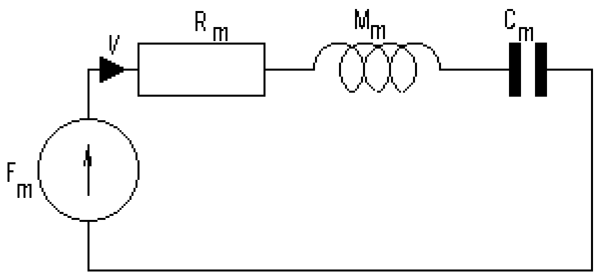
Réseau Mécanique Réseau Electrique Réseau Acoustique
Grandeur Symbole Grandeur Symbole Grandeur Symbole
Force F_m <-> Force électro motrice E_e <-> Pression P_a
Déplacement X <-> Quantité d'électricité Q <-> Volume $\mathbb{V}_b$
Vitesse V <-> Intensité de courant I <-> Flux de vitesse $\mathcal{V}_a$
Masse M_m <-> Inductance L_e <-> Inductance M_a
Résistance R_m <-> Résistance R_e <-> Résistance R_a
Compliance C_m <-> Capacitance C_e <-> Compliance C_a

Remarque Le flux d'accélération est important dans la modélisation d'un HP ou d'un microphone.
Nous pouvons le définir à partir de AN-24 Φ_a = p . $\mathcal{V}_a$ (AN-26)

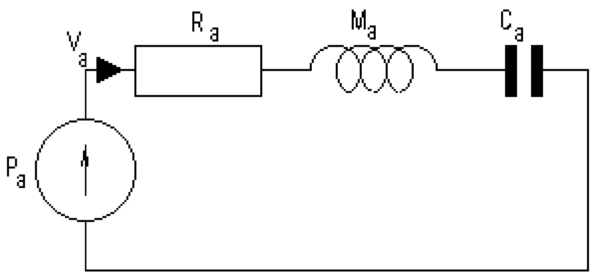
et Φ_a = p² . S . X (AN-27)

La représentation schématique du réseau électrique est inchangée. Par contre le schéma du réseau

mécanique est devenu



et le réseau acoustique



2-3- Impédances

Elles sont faciles à mettre en évidence en partant du modèle électrique.*

En partant de l 'équation AN-10

$E_{e(p)}$ /I = Z_e (AN-28)
est l'impédance du circuit qui charge le générateur ,

$Z_e = (p.\ L_e + R_e + 1/\ p.\ C_e)$ (AN-29). Elle s'exprime en Ohms [$M.L_2.T_{-1}.Q_{-2}$].

De même en partant de AN-14 et par analogie $F_{m(p)} / V = Z_m$. (AN-30)

C'est l'impédance mécanique du circuit [$M.T_{-1}$].

$Z_m = (p.\ M_m + R_m + 1/p.C_m)$ (AN-31)

Elle s'exprime en Ohms mécaniques ou en Newton seconde /mètre.
En substituant p par $j.\omega$ son équivalent complexe, ω est la pulsation en radians par seconde (rd/s) [T_{-1}]
$Z_m = (j.\omega.\ M_m + R_m + 1/\ j.\omega.C_m)$ (AN-32)
ou, $Z_m = (j.\omega.\ M_m + R_m - j/\omega.C_m)$ (AN-33)

On fait apparaître les réactances:
de M_m, $X_{Mm} = Mm.\omega$, (AN-34)
et de C_m $X_{cm} = 1/Cm.\omega$ (AN-35)

Une factorisation de j dans AN-31

$Z_m = R_m + j\ (M_m.\ \omega - 1/C_m .\ \omega)$ (AN-36)
soit $Z_m = R_m + j.X_m$, (AN-37) met en évidence la réactance totale de l'impédance du circuit mécanique.

$X_{mt} = M_m.\ \omega - 1/C_m .\ \omega = X_{Mm} - X_{cm}$ (AN-38)

Le même procédé est utilisé dans le circuit acoustique.
De AN-20 nous tirons $P_a / V_a = Z_a$. (AN-39)

C'est l'impédance du circuit acoustique. Elle est le quotient complexe de la pression acoustique P_a supposée uniforme sur toute la surface S, par le flux de vitesse V_a engendré à travers cette même

surface. $Z_a = (p.\ M_a + R_a + 1/p.C_a)$ (AN-40)
et ainsi: $Z_a = (j.\omega.\ M_a + R_a - j/\omega.C_a)$. (AN-41)

La réactance de la masse acoustique
$X_{Ma} = M_a.\omega$, (AN-42)

et celle de la compliance
$X_{ca} = 1/C_a.\omega$, (AN-43) permettent de déterminer la réactance acoustique totale de l'impédance du circuit acoustique.
$X_{at} = M_a.\ \omega - 1/(C_a .\ \omega) = X_{Ma} - X_{ca}$ (AN-44)